

## Kaustiken – Zur Bildentstehung an sphärischen Spiegeln

Marc Müller, Johannes Grebe-Ellis

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Physik, AG Didaktik der Physik  
Newtonstr. 15, 12489 Berlin, marc.mueller@physik.hu-berlin.de

### Kurzfassung

Ausgehend von der Feststellung, dass die in einem Hohlspiegel sichtbaren reellen Spiegelbilder nicht ortsfest sind, sondern auf die Bewegungen des Beobachters reagieren, wird nach einem verallgemeinerbaren Ansatz für eine ‚Phänomenologie der Bildentstehung an sphärischen Spiegeln‘ gefragt. Als entscheidend erweist sich dabei die Untersuchung der Bedingungen, unter denen *Kaustiken* entstehen. Diese können als Gesamtheiten von reellen Spiegelbildern angesehen werden. Zur Veranschaulichung wird der Versuch „Hohlspiegel im Milchbad“ vorgestellt.

### 1. Einleitung

Im Zusammenhang einer phänomenologischen Beschreibung des Regenbogens sind wir der Frage nachgegangen, was eigentlich in den von der Sonne beleuchteten Regentropfen zu sehen ist. Beobachtungen an Tropfenmodellen haben gezeigt, dass dabei der Entstehung von reellen Bildern der Sonne besondere Bedeutung zukommt. Diese erscheinen in der dem Beobachter abgewandten, hohl spiegelnden Tropfenrückseite [1]. Um den Regenbogen phänomenologisch zu erschließen, erscheint es daher sinnvoll, sich mit den Bedingungen der Bildentstehung an sphärischen Hohlspiegeln vertraut zu machen. In der vorliegenden Ausarbeitung argumentieren wir dafür, dass sich der Schlüssel zu einem solchen Verständnis in den an Hohlspiegeln auftretenden Kaustiken findet. Diese bilden – so unsere These – Gesamtheiten von unter verschiedenen Blickwinkeln sichtbaren Spiegelbildern.

Sollte sich diese Art der Betrachtung bewähren, könnte sie nicht nur für den Regenbogen, sondern für die Bilder in gekrümmten Spiegeln allgemein fruchtbar werden. Im folgenden Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen reellen Spiegelbildern und Kaustiken aufgedeckt. Ein einfacher Versuch, mit dem dieser Zusammenhang unmittelbar gezeigt werden kann, wird im dritten Abschnitt beschrieben. Die Bespre-

chung des Versuchs und seine Dokumentation folgen darauf im vierten Abschnitt. Wie die am sphärischen Hohlspiegel gewonnenen Erfahrungen auf sphärische Spiegel überhaupt systematisch verallgemeinert werden können, ist Gegenstand des letzten Abschnitts.

### 2. Was Kaustiken mit Spiegelbildern zu tun haben

Wer entgegen dem „klassischen“ strahlenoptischen Ratschlag stark gekrümmte Hohlspiegel benutzt und dabei auf Schirme zur Abbildung verzichtet, wer also direkt in eine handliche, hohl spiegelnde Halbsphäre z. B. eines geputzten Aschenbechers hineinschaut, kann das kopfstehende, reelle Spiegelbild einer Kerze oder der Sonne im Innern der Sphäre „schweben“ sehen. Obwohl dabei die zu Abbildungsfehlern führenden achsenfernen Bereiche der Anordnung weder technisch noch gedanklich ignoriert werden und obwohl auch kein Schirm an einer wohl definierten Stelle das Bild „auffängt“, sind die Spiegelbilder klar und scharf sichtbar. Es ist sogar möglich, ihren Ort innerhalb der Sphäre stereosko-

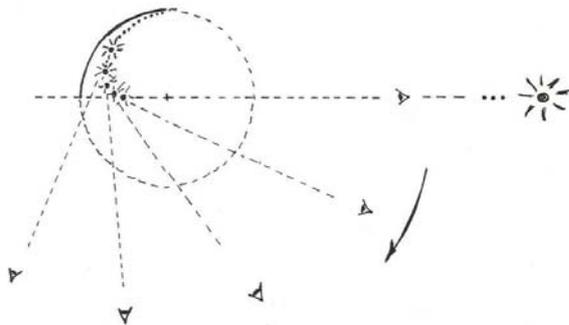


Abb. 1: Ausgesuchte Positionen eines Rundgangs um eine hohl spiegelnde Viertelsphäre mit den jeweiligen reellen Spiegelbildern der Sonne.



Abb. 2: Die Gesamtheit aller Orte der gespiegelten Sonne bildet eine Brennlinie, die z. B. als „Kaffeetassenkataustik“ sichtbar wird [5].

pisch zu bestimmen, indem man z. B. mit einem Stift nach ihnen „stochert“ (vgl. z. B. [2], [3], [4]).

Noch interessanter ist der Umstand, dass die Spiegelbilder nicht ortsfest sind, sondern auf unsere eigenen Bewegungen im Raum antworten: Während eines Rundganges um die Halbsphäre wandert das Spiegelbild z. B. der Sonne in charakteristischer Weise innerhalb der Halbsphäre von der optischen Achse und von uns Beobachtern weg.

Abbildung 1 gibt einen Überblick über Stationen und Bildorte eines solchen Rundgangs. Um das „Ausweichen“ des Hohlspiegelbildes möglichst weit verfolgen zu können, wurde die Halbsphäre durch eine Viertelsphäre ersetzt: Befinden wir uns auf der optischen Achse zwischen Sonne und Sphärenmittelpunkt, dann erscheint uns das Spiegelbild der Sonne im Brennpunkt – also dort wo es auch auf einem Schirm abbildbar wäre. Jedenfalls würden wir es dort sehen, wenn wir es in dieser Situation nicht eigentlich gerade mit unserem Kopf beschatten würden. Bewegen wir uns aber von der optischen Achse weg, so wandert das (nun aus dem Schatten hervortretende) Bild gleichfalls, jedoch in *Gegenrichtung* von der optischen Achse weg. Mit immer größer werdendem Beobachtungswinkel  $\varphi$  kommt uns der Weg, den das Bild beschreibt, womöglich immer bekannter vor. Denn ein Vergleich mit den typischen Katakaustiken an Hohl- oder Zylinderspiegeln zeigt, dass das Spiegelbild der Sonne gerade entlang seiner eigenen Katakaustik wandert.<sup>1</sup>

Eine der geläufigsten Aufkommen solcher Katakaustiken im Alltag – und daher auch physikalischen Laien bekannt – zeigt die von UCKE und ENGELHARDT übernommene Abbildung 2: Die so genannte „Kaffeetassenkatakaustik“ in einer von der Sonne beschienenen und mit Kaffee gefüllten Tasse (deren Wand hier zusätzlich mit Spiegelfolie ausgekleidet ist).

Zuletzt können die während des Rundganges gesammelten Erfahrungen zu einer Charakteristik der Katakaustiken an Hohlspiegeln überhaupt zusammengefasst werden:

*Die zu einem bestimmten Objekt gehörige Katakaustik ist die Gesamtheit aller im Hohlspiegel sichtbaren reellen Spiegelbilder dieses Objektes.*

Darüber hinaus kann, wenn die Katakaustik bekannt ist, auch leicht der Ort jedwedes von einem gegebenen Standort aus sichtbaren Spiegelbildes bestimmt werden:

*Das jeweilige Spiegelbild wird dort gesehen, wo die Tangente vom jeweiligen Beobachter-*

<sup>1</sup> Im Folgenden wird abkürzend zumeist von „Kastiken“ gesprochen. Durchweg sind jedoch die bei Reflexion auftretenden „Katakaustiken“ gemeint – im Unterschied zu den bei Refraktion auftretenden „Diakaustiken“.

*standort an den jeweils abgewandten Zweig der Katakaustik diese berührt.*

### 3. Wie man zeigen kann, dass die Kastiken am Hohlspiegel Gesamtheiten reeller Spiegelbilder sind

Am besten wäre nun ein Versuch, bei dem Spiegelbild und Kastik einer Leuchte zugleich sichtbar wären. Dann könnte man mühelos den Weg des Bildes während des Rundgangs verfolgen und *zugleich* feststellen, ob es der Vorhersage gemäß auf der Kastik entlang läuft oder nicht. Ungünstigerweise erscheint die Kastik aber nur auf einer diffus streuenden Fläche, die zudem so in die Spiegelsphäre eingeführt sein muss, dass die zur Kastik gehörigen Spiegelbilder gerade „verschwinden“. Denn Spiegelbilder erscheinen nur beim freien Blick in den Spiegel, der hier jedoch von jeglichem Standort aus von der undurchsichtigen, weil eben diffus streuenden Fläche verstellt ist. Kurzum: Entweder sehen wir das Spiegelbild oder die Kastik.

Es sind natürlich auch Versuche mit Zylinder- anstatt mit Hohlspiegeln denkbar. Dort erscheinen die Spiegelbilder bei nicht allzu flachem Blick auf die kaustische Ebene *über* dieser und damit *vor* dem ungestört sichtbaren Spiegel. Dafür sind sie aber besonders stark gestaucht und die Tatsache ihrer räumlichen Lage vor der Spiegelfläche ist bei weitem weniger eindrucklich.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet der Aufbau „Hohlspiegel im Milchbad“, der in Abbildung 3 skizziert ist: In einem Bad aus (verdünnter) Milch steht genau zur Hälfte eingetaucht eine hohl spiegelnde Halbsphäre. Die Viertelsphäre im Milchbad bleibt aufgrund der Intransparenz der weißen Milch unsichtbar. Die über die Milchoberfläche hinaus ragende Viertelsphäre spiegelt sich jedoch klar in

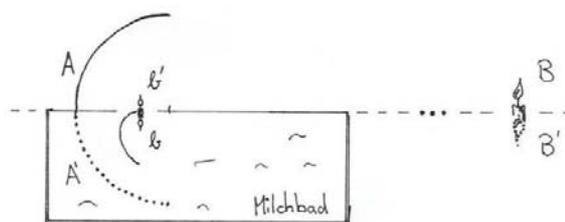


Abb. 3: Skizze (oben) und Foto (unten) des Versuchsaufbaus „Hohlspiegel im Milchbad“.

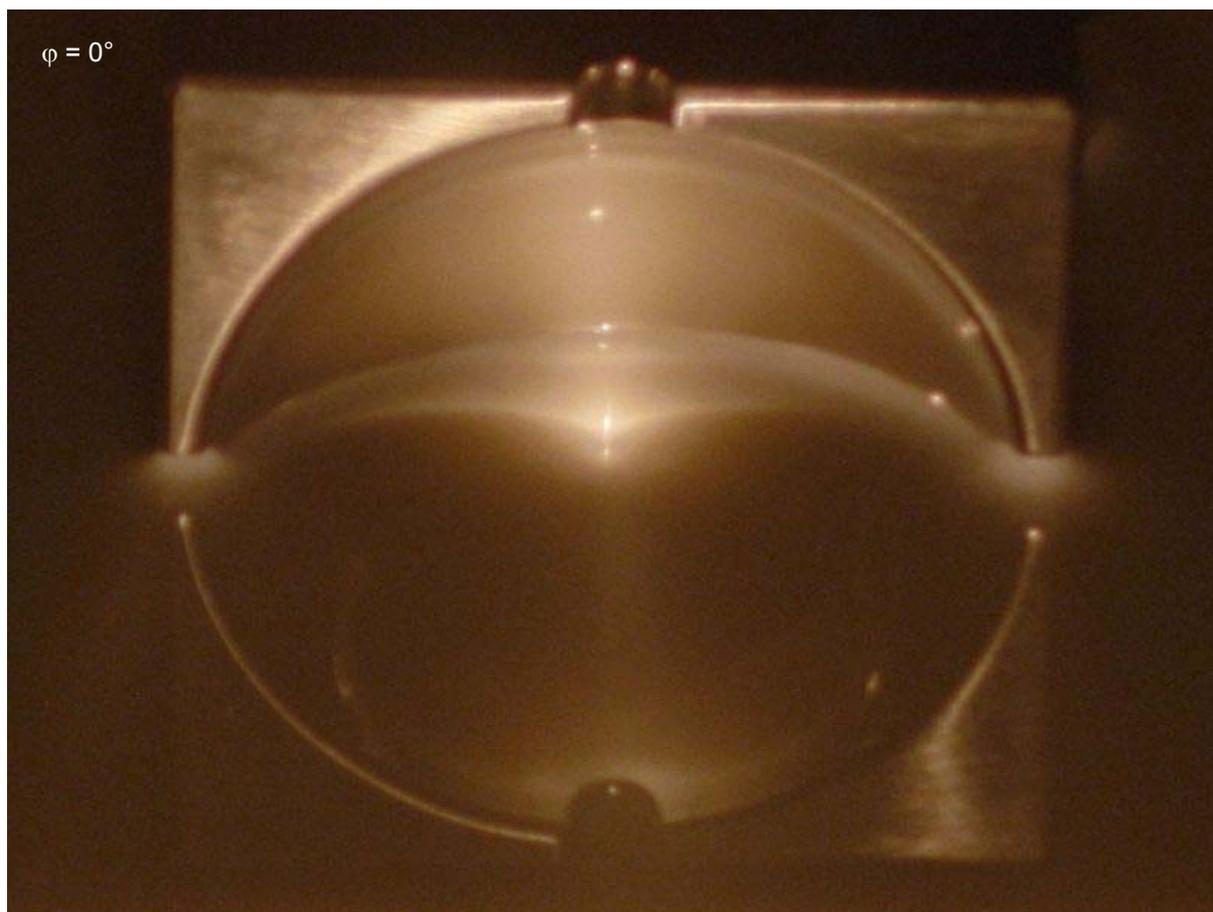


Abb. 4: Frontalansicht der Halbsphäre im Milchbad mit den beiden reellen Spiegelbildern der Kerze und der Kaustik. Oben links ist, wie auch auf den folgenden Aufnahmen, der Beobachtungswinkel angegeben.

der Milch, so dass optisch diese beiden Viertelsphären – die sich spiegelnde (A) und die gespiegelte (A') – gemeinsam wieder als Halbsphäre wirken (vgl. das Foto des Aufbaus in Abbildung 3 sowie die folgenden Bilder). Dies ist der erste Vorteil des Aufbaus.

Außerdem spiegelt sich die Kerze, deren Hohlspiegelbild im Folgenden untersucht werden soll, ihrerseits in der Milchoberfläche. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man flach über das Bassin hinweg die Kerze anschaut. Dann sieht man unter der aufgestellten, tastbaren Kerze (B) im Milchspiegel noch eine zweite, kopfstehende Spiegelkerze (B'). Der zweite Vorteil des Aufbaus besteht gerade darin, dass sich im Hohlspiegel (A und A') auch beide Kerzen (B und B') spiegeln. Während die erste ein gewohntes kopfstehendes reelles Bild „unter“ der Milchoberfläche gibt, liegt das reelle Hohlspiegelbild der zweiten aufrecht „über“ der Milchoberfläche.

Als dritter Vorteil des Aufbaus kommt hinzu, dass eine von den beiden Kerzen gemeinsam erzeugte Kaustik zu beobachten ist. Dafür ist der Umstand verantwortlich, dass nicht nur die klar spiegelnde Milchoberfläche sondern auch noch die unmittelbar unter ihr liegenden Milchteilchen bzw. eine dünne Schicht milchiger Trübe beleuchtet werden. Dort

findet aber diffuse Streuung statt, so dass die Erscheinungsbedingung der Kaustik erfüllt ist.

Somit werden in diesem Versuch zugleich zwei übereinander stehende Kerzenbilder und eine zugehörige Kaustik im Hohlspiegel schwebend sichtbar.

#### 4. Rundgang um die Halbsphäre im Milchbad

Im Folgenden wird ein Rundgang um die eben beschriebene Anordnung besprochen und anhand einer Reihe von Aufnahmen dokumentiert. Als Spiegel diente ein fast halbsphärischer, innen spiegelnd polierter Aschenbecher aus Aluminiumguss von ca. 8 cm Sphärendurchmesser (für 5 € erhältlich bei einem schwedischen Einrichtungshaus). Die Abbildungen 4, 5 und 6 zeigen Nahaufnahmen der Kerzenspiegelbilder in der optisch wirksamen Halbsphäre. Diese wurden unter verschiedenen Beobachtungswinkeln  $\varphi$  zur optischen Achse, die durch den Kerzenstandort und den Sphärenmittelpunkt führt, aufgenommen, so dass der Rundgang nachvollzogen werden kann.

Auf der ersten Aufnahme – Abbildung 4 – ist in Frontalansicht gut zu erkennen, wie sich die spiegelnde und die gespiegelte Viertelsphäre zu einer Halbsphäre ergänzen, in deren Brennweite, „eingeklemmt“ zwischen die beiden Zweige der Kaustik, zwei kleine Flammenbilder schweben.

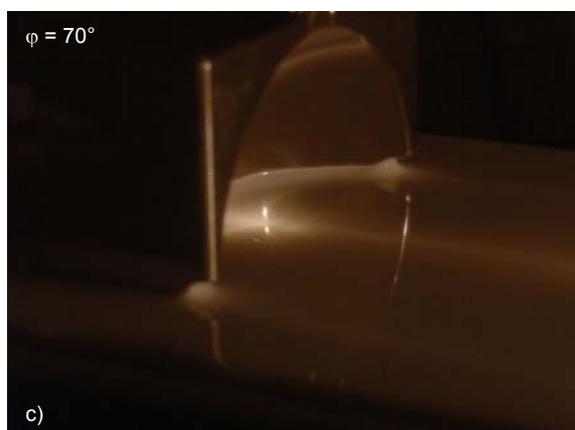
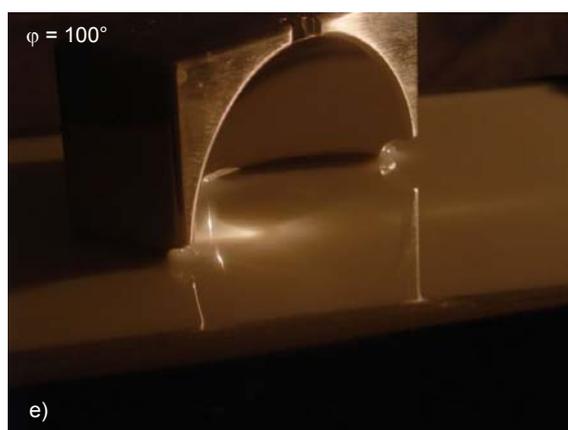
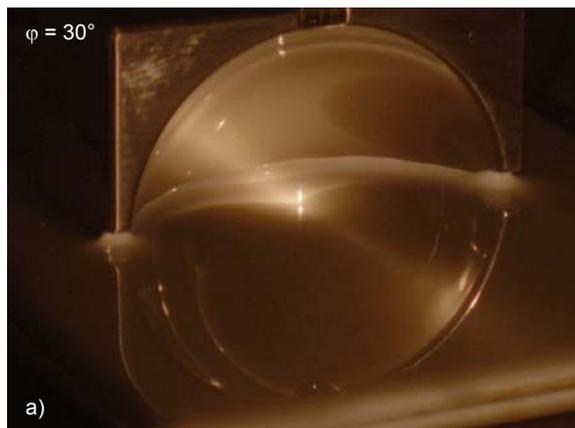


Abb. 5 a) bis f): Fünf Stationen auf dem Rundgang um den Hohlspiegel im Milchbad und ein vergrößerter Ausschnitt des interessanten Bereiches um die gespiegelten Kerzen sowie die zugehörige Kaustik für den Beobachtungswinkel von ca.  $100^\circ$ .

Auf den nächsten drei Aufnahmen – Abbildungen 5 a) bis c) bei  $\varphi = 30^\circ$ ,  $50^\circ$  und  $70^\circ$  – sind die Kerzenbilder zwar nur wenig, aber doch Schritt für Schritt auf dem abgewandten Zweig der Kaustik von deren Zentrum weggewandert.

Da bei weiterer Kamerabewegung die linke Seite des Spiegels den Blick auf die Kerzenbilder verstellen würde, wurde der Spiegel für die nächsten Aufnahmen bei noch größeren Beobachtungswinkeln etwas gedreht. Dabei verschwinden sowohl der uns zugewandte Zweig der Kaustik als auch der hintere Teil

des abgewandten Zweiges (letzterer durch Abschattung). Beides beeinträchtigt jedoch nicht die Beobachtung.

Auf den Abbildungen 5 d) und e) bei  $\varphi = 90^\circ$  und  $100^\circ$  sind die Kerzenbilder jetzt deutlich auf der Kaustik weiter gerückt. Da mit dem Beobachtungswinkel von  $100^\circ$  die finale Position des Rundgangs erreicht ist, wurde für diese Situation zusätzlich noch der Bereich um die Spiegelbilder vergrößert. Auf der Abbildung 5 f) ist das obere Spiegelbild besonders eindrucksvoll als ein Kerzenbild zu er-

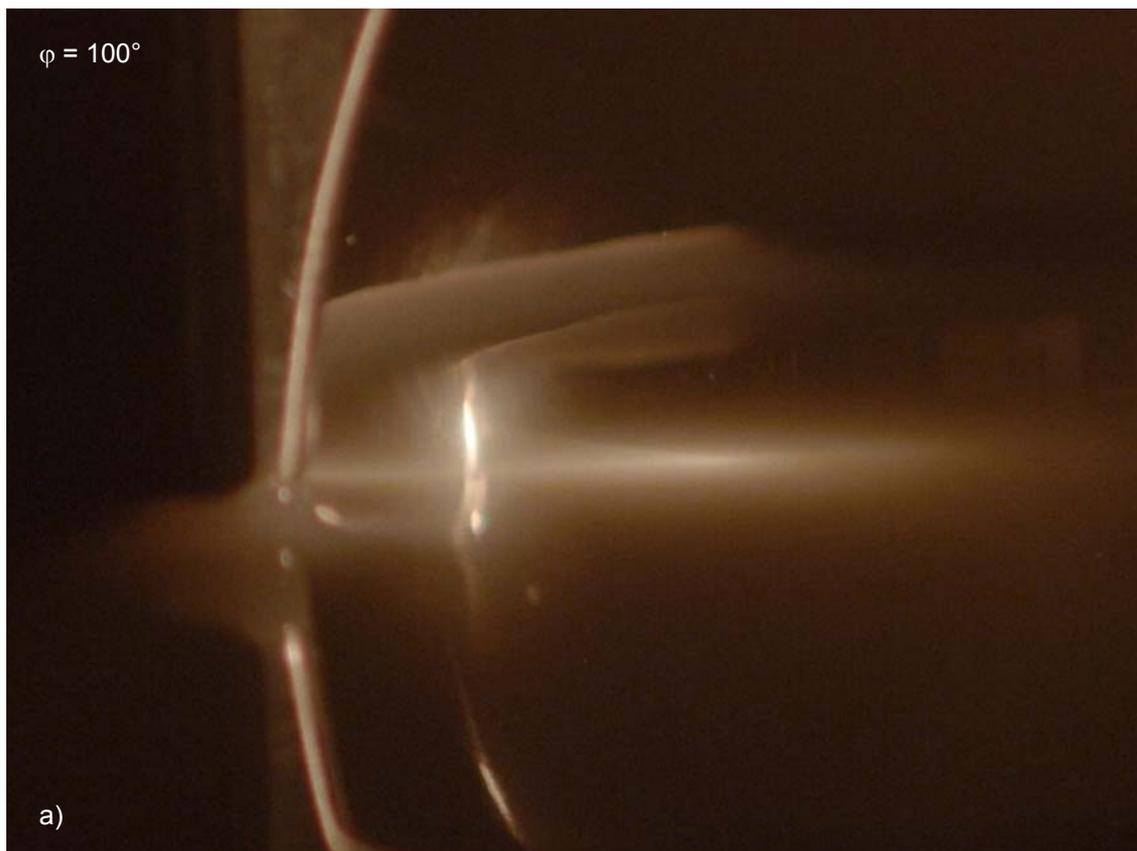


Abb. 6 a) und b): Zwei vergrößerte Ausschnitte des interessanten Bereiches für den Beobachtungswinkel von ca.  $100^\circ$ . Im Vergleich zu Abb. 5 f) wurde die Kamera in zwei Schritten abgesenkt.

kennen. Außerdem aber befindet sich die Flamme dieser Kerze leicht unter der Kaustik, was auf den ersten Blick dem zu widersprechen scheint, was der Versuch zeigen sollte – wurde doch oben „versprochen“, dass die Kerze (bzw. ihre Flamme) „auf der Kaustik entlang läuft“, weil diese gerade als Gesamtheit aller (eigentlich verschiedenen) Kerzenbilder verstanden werden kann. Allerdings galt diese Voraussage unter der Bedingung, dass wir Beobachter uns *in der Ebene der Kaustik* befinden. Durch das Kameraauge hindurch blicken wir aber leicht *von oben* auf die Milchoberfläche, auf der sich die Kaustik abzeichnet. Kerzenbilder und Kaustik gehören also streng genommen gar nicht zusammen.

Deswegen wurden die beiden letzten Aufnahmen – Abbildungen 6 a) und b) – unter geringerem Aufblickwinkel aufgenommen. Wir Beobachter sind gewissermaßen in die Hocke gegangen. Dabei gelangt die (immer schwieriger auszumachende) Kaustik genau zwischen die beiden Kerzenbilder bzw. steigt das obere, aufrechte Kerzenbild über die Kaustik hinaus auf. Gleichzeitig ordnen sich beide Kerzenbilder wie erwartet sowohl in gerade Linie als auch symmetrisch zur Kaustik. Bei ganz flachem Aufblick ist die Kaustik freilich kaum noch zu erkennen. Damit umgeht letztlich auch dieses Experiment nicht das anfängliche „Dilemma“, nachdem entweder Spiegelbild oder Kaustik sichtbar sind.

### 5. Kaustiken und eine Phänomenologie sphärischer Spiegel überhaupt

In den vorigen Abschnitten wurde gezeigt, dass die an sphärischen Hohlspiegeln auftretenden Kaustiken als Gesamtheiten reeller Spiegelbilder verstanden werden können. An dieser Stelle soll darüber hinaus nach der Erweiterbarkeit dieses Ansatzes auf sphärische Wölbspiegel und damit auf sphärische Spiegel überhaupt gefragt werden. Dafür muss aber zuvor auf die geometrische Gestalt der Kaustiken und damit den Weg ihrer mathematischen Fassbarkeit eingegangen werden.

Die erste richtige analytische Konstruktion einer Katakaustik am Hohlspiegel legte Johann BERNOULLI

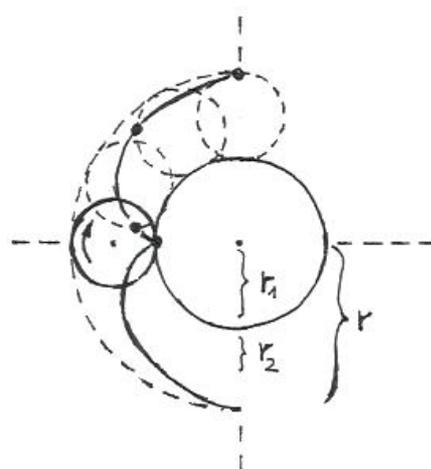


Abb. 7: Zur Konstruktion einer Nephroide – einer Epizykloide mit  $r_1 = 2r_2$ .

LI (1667-1748) in seiner *Ersten Integralrechnung* (entstanden 1691/92) vor. Bernoulli wies nach, dass bei exakter, strahlenoptischer Reflexion einfallender Parallelstrahlen – also für die Spiegelung der Sonne – die erscheinende Kaustik die Form einer Epizykloide hat [6]. Epizykloiden sind ebene Kurven, die beim Abrollen eines Kreises auf einem anderen entstehen, wenn dabei ein Punkt der Peripherie des abrollenden Kreises verfolgt wird. Die jeweilige Form hängt vom Verhältnis der Radien von Roll- und Leitkreis ab. Im Falle der Sonne, die wir als optisch unendlich fern annehmen können, ist dieses Verhältnis 1:2 und die sich ergebende spezielle Epizykloide heißt *Nephroide* (Abb. 7).

Das Vorgehen BERNOULLIS kann konsequent fortgeführt auf zweierlei Weise fruchtbar werden: Erstens gilt die Konstruktionsvorschrift für die Nephroide an sphärischen Hohlspiegeln genauso für sphärische Wölbspiegel. Denn von welcher Seite die Parallelstrahlen auf die spiegelnde Sphäre einfallen, ist nach dem Reflexionsgesetz gleichgültig. Die Menge der gespiegelten und durch den Spiegel hindurch rückwärtig verlängerten Strahlen ist in beiden

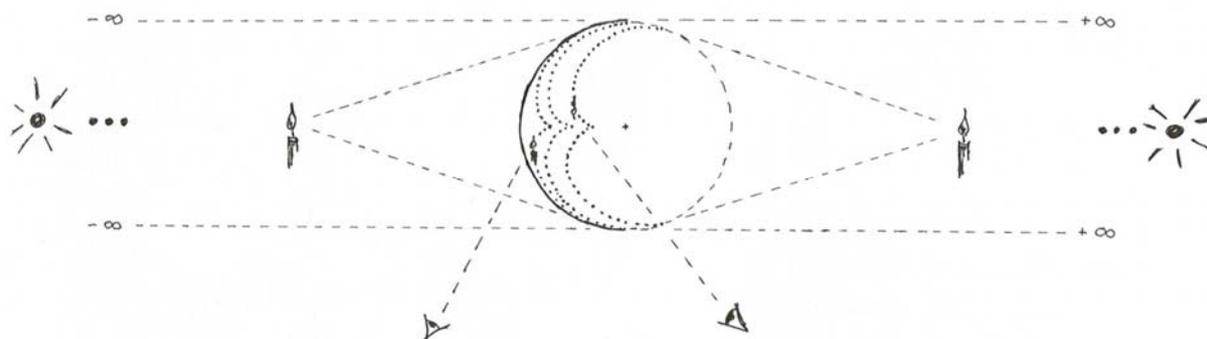


Abb. 8: Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Ort des sich spiegelnden Objektes, zugehöriger Kaustik, Beobachterstandort und gesehendem Spiegelbild für eine beidseitig verspiegelte Halbsphäre.

Fällen identisch. Und somit sind es auch die zugehörigen Kaustiken. Nur dass diese in dem einen Fall reell und in dem anderen virtuell sind.

Für die übersichtliche Darstellung der hier in Betracht kommenden Verhältnisse (Abb. 8) wurde daher eine beidseitig verspiegelt Halbsphäre angenommen. Von links wirkt sie optisch als Wölb- und von rechts als Hohlspiegel. Somit gehört zu den beiden Sonnen, die sich links und rechts optisch im Unendlichen befinden, geometrisch betrachtet ein und dieselbe Kaustik. Während das reelle Spiegelbild der rechten Sonne beim Rundgang um den Hohlspiegel aber auf dem uns *abgewandten* Zweig entlang wandert, bewegt sich das virtuelle Spiegelbild der linken Sonne beim Rundgang um den Wölbspiegel auf dem uns *zugewandten* Zweig. So verblüffend dies sein mag, so ist es beim Rundgang um einen raumfesten, handlichen Wölbspiegel leicht nachprüfbar – wenn auch nicht so leicht wie beim Hohlspiegel.

Zweitens berühren die beiden Zweige der Nephroide die Sphäre gerade dort, wo auch die Tangenten von den Sonnen an die Sphäre diese berühren. Kurzum: Durch das Fällen der Tangenten vom Objekt an die Sphäre können die Punkte gefunden werden, welche die fragliche Kaustik mit der Sphäre gemein hat. Die Positionen dieser Punkte auf der Sphäre bestimmen wiederum eindeutig die zugehörige Epizykloide und damit die geometrische Gestalt der fraglichen Kaustik. BERNOULLI zeigt dies explizit für ein sich spiegelndes Objekt, dass dem Hohlspiegel genau gegenüber auf dem Sphärenrand „sitzt“. Dort ergibt sich folgerichtig eine Kardiode.

Für die oben beschriebene Versuchsanordnung, in der das Spiegelbild einer verhältnismäßig sphärennahen Kerze betrachtet wurde, ergeben sich damit die zur rechten Kerze gehörigen Verhältnisse (weiter Abb. 8). Ohne weiteres kann auf der linken Seite gleichfalls die symmetrische Situation einer sich sphärennah vor dem Wölbspiegel befindliche Kerze dargestellt werden. Für beide Situationen sind zusätzlich die jeweiligen Spiegelbilder bezüglich zweier ausgewählter Beobachterstandorte angedeutet.

Auf die eben skizzierte Weise kann für jedes beliebige Objekt – jedenfalls solange es sich außerhalb der Sphäre befindet – und für jeden beliebigen Beobachterstandort der Ort des zugehörigen reellen oder virtuellen Spiegelbildes im sphärischen Hohl- oder Wölbspiegel angegeben werden:

*Im ersten Schritt wird mithilfe der Tangente vom Objekt an die Sphäre die konkrete Epizykloide und damit die zugehörige Kaustik konstruiert.*

*Im zweiten Schritt wird die Tangente vom Beobachterstandort an die Kaustik gelegt – im Falle des Hohlspiegels an den abgewandten und im Falle des Wölbspiegels an deren zugewandten Zweig.*

*Wo sich beide berühren, wird das Spiegelbild gesehen.*

Da Kaustiken nicht nur an sphärischen Spiegeln auftreten, ist anzunehmen, dass ein solches Vorgehen auch für anders gekrümmte Spiegel hilfreich ist. Z. B. entarten für bestimmte Objektabstände an elliptischen oder hyperbolischen Spiegel die Kaustiken, also die Gesamtheiten der Spiegelbilder zu Punkten. Die Spiegelbilder solcher ausgewählter Objekte sind dann ortsfest und somit „immun“ gegenüber den Ortsbewegungen des Beobachters (vgl. [4]).

Zuletzt soll noch ein erstaunlicher Aspekt dieses Vorgehens erwähnt werden. Denn es drängt sich doch der Eindruck auf, das hier zwei üblicherweise als unvereinbar geltende Konzepte zwanglos und gewinnbringend vereinigt sind: das frühneuzeitliche Lichtstrahlkonzept und das antike Sehstrahlkonzept. Mithilfe des ersten können die Kaustiken konstruiert werden und mithilfe des zweiten wird festgestellt, wo auf den Kaustiken der Beobachter das Spiegelbild sieht. Solange dieses sichtbar ist, bleibt freilich die Kaustik selbst, also die Stelle, an der sich beide Konzepte berühren, *unsichtbar*. Diese Harmonie zwischen zwei Inkommensurablen könnte uns Physiker durchaus beunruhigen. Zugegeben: Sie stellt sich ein, wenn man im gezeigten Sinne phänomenologisch vorgeht, d. h. gerade dann, wenn auf das Postulat irgendwelcher, den Raum tatsächlich durch-eilender und am Sehen beteiligter Strahlen verzichtet wird.

## 6. Literatur

- [1] MÜLLER, M.; GREBE-ELLIS, J. (2007): *Spiegelbilder der Sonne im Tropfen – Zur Phänomenologie des Regenbogens*. In: Nordmeier, V.; Oberländer, A. (Hrsg.): *Didaktik der Physik – Regensburg 2007*. Berlin: Lehmanns Media.
- [2] MAIER, Georg (2004): *blicken-sehen-schauen*. Dürna: Kooperative Dürna
- [3] ERB, R. (1995): Curved Mirrors. In: *Physics Education* 30: 287-289
- [4] SCHÖN, L. (1996): *Die Fadenkonstruktion gekrümmter Spiegel*. In: DPG (Hrsg.): *Didaktik der Physik – Jena 1996*
- [5] UCKE, C.; ENGELHARDT, C. (1998): Kaustik in der Kaffeetasse. In: *Physik in unserer Zeit* 29: 120-122
- [6] KOWALEWSKI, G. (Hrsg.) (1914): *Die erste Integralrechnung – Eine Auswahl aus Johann Bernoullis Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes*. Leipzig/Berlin: Engelmann: S. 110-137