[Eingereichte Fassung; Zitationen erfolgen bitte nach dem Original:
Risse, J. & Blömeke, S. (2008). Kriterien lernprozessanregender Aufgaben und
deren Umsetzung bei der Konstruktion von Aufgaben zum Thema Differenzialgleichungen.
Der Mathematikunterricht, 54 (2), S. 33-45.]

Jana Risse, Sigrid Blömeke

Kriterien lernprozessanregender Aufgaben und deren Umsetzung bei der Konstruktion von Aufgaben zum Thema Differenzialgleichungen

Aufgaben sind zentrale Elemente des Mathematikunterrichts. Mit Aufgaben werden Schüleraktivitäten initiiert und organisiert und so Lernprozesse anregt.

Durch mathematische Aufgaben eingeleitete Lernprozesse weisen dabei zwei Aspekte auf. Zunächst beziehen sie sich als Aufforderungen zur Auseinandersetzung mit einer spezifischen mathematischen Situation (vgl. Neubrand 2002, S. 17) auf einen mathematischen Inhalt. Die Schüler können durch die Beschäftigung mit einer entsprechenden Aufgabe ihr Begriffsnetz erweitern, ihre inhaltlichen Kenntnisse vertiefen und ausbauen. Diese an den mathematischen Gegenstand (oder einen Sachgegenstand) gebundenen Lernaktivitäten werden auch mit *Lernen auf der Ebene 1* (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 261/262) bezeichnet. *Lernen auf der Ebene 2* bezieht sich dagegen auf Lernhandlungen, die zwar über Ebene 1 zu entwickeln sind, aber schließlich vom konkreten Gegenstand der Aufgabe abstrahiert werden sollen. Diese Komponente bezieht sich auf die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen durch den Einsatz von Aufgaben.

Der vorliegende Beitrag ordnet sich in die Konzeption des zielgerichteten Einsatzes von Aufgaben zur Förderung mathematischer Kompetenzen ein. Dabei sollen die inhaltliche und die kompetenzgerichtete Komponente jeweils gleichgewichtig berücksichtigt und im Sinne eines kumulativen Kompetenzaufbaus deutlich aufeinander bezogen werden. Die Aufgabenentwicklung stützt sich auf ein fachübergreifendes lerntheoretisch basiertes Modell für lernprozessanregende Aufgaben (vgl. Blömeke et al. 2006), für das aufgezeigt wird, wie damit mathematische Kompetenzen gefördert werden können.

Die entwickelten Aufgaben haben zum Ziel, Schülern der gymnasialen Oberstufe durch Übertragung der in der Differenzialrechnung erarbeiteten Begriffe und Verfahren einen anwendungsorientierten Einstieg in das mathematische Konzept der (gewöhnlichen) Differenzialgleichung zu gewähren. Eine fachsystematische Durchdringung im Sinne einer Theorie der Einführung in das Konzept der Differenzialgleichung steht dabei nicht im Mittelpunkt.

Kriterien lernprozessanregender Aufgaben

Unter Beachtung ihrer Funktionen im Unterricht können Aufgaben zum *Lernen* von Aufgaben zum *Leisten* unterschieden werden (vgl. Büchter/Leuders 2005, S. 165). Für beide Aufgabengruppen gibt es gemeinsame Kriterien der Aufgabenqualität, wie z. B. eine gewisse Offenheit. Andere Kriterien sind spezifisch für Aufgaben des Lernens oder ergeben sich aus der besonderen Situation des Leistens heraus. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit Aufgaben, die dem Aufbau und der Vertiefung mathematischer Kompetenzen und Kenntnisse dienen, also *Lern*prozesse anregen sollen.

Ein differenzierter Katalog fachübergreifender Merkmale von Aufgabenqualität für lernprozessanregende Aufgaben, die sich aus dem kognitionstheoretischen Lernmodell von Tulodziecki, Herzig und Blömeke (2004, S. 55) sowie Aspekten konstruktivistischer Ansätze begründen, wurde 2006 von Blömeke et al. vorgestellt. Dieser Kriterienkatalog wird im Folgenden mit mathematikdidaktischen Modellen verbunden und für mathematische Aufgaben konkretisiert.

1. Die Aufgabe spricht *gesellschaftlich relevante Inhalte und Methoden* an. Nach Klafki (1969, S. 14) sind Bildungsinhalte daran festzumachen, dass sie stellvertretend für viele Kulturinhalte stehen, Grundprobleme, allgemeine Prinzipien, Methoden, Werte etc. aufzeigen und vermitteln. Übertragen auf die Mathematik heißt das, die Schüler mit wichtigen Mathematisierungsmustern, elementaren mathematischen Techniken sowie grundlegenden mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut zu machen.

2. Aufgaben, die auf einen Lernprozess bei Schülern zielen, sollten ihre *Bedürfnisse* ansprechen (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 80ff.), denn aus den wechselseitigen Beziehungen zwischen Bedürfnis und Situation entsteht Motivation (vgl. Heckhausen 1974, S. 151ff., Rheinberg 2002, S. 44ff., S. 61ff.). In der Schule findet Lernen statt, indem die vom Lehrer gestellten Aufgaben zum Objekt der Schüleraktivitäten werden (vgl. Christiansen/Walther 1986, z. B. S. 290ff.). Hier kann sich Lernen nicht in jedem Fall auf Aktivitäten stützen, die aus individuellen Bedürfnissen herrühren. Aufgaben, mit denen es gelingt, solche anzusprechen, können jedoch zu einer starken Motivierung führen.
   Aus dem mathematikdidaktischen Modell zur Aufgabenqualität von Leuders (2001, S. 98ff.) dienen die Dimensionen Authentizität und Aufforderungscharakter der Motivierung und Aktivierung der Schüler. Gelingt es mit authentischen Kontexten, Schülern die Nützlichkeit einer Aufgabe glaubwürdig zu machen, bekommt die Aufgabe für sie Relevanz und sie machen sich ihre Ziele zu eigen.

3. Um einen Zuwachs an Kompetenz einzuleiten, müssen die *Anforderungen der Aufgabe knapp über den vorhandenen intellektuellen Fähigkeiten* liegen (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 335). Lernprozessanregende Aufgaben müssen einen Neuigkeitswert haben und hinreichend komplex sein (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 82). Die allgemeinen kognitiven Anforderungen lassen sich durch die Hierarchie von Anderson et al. (2001) in zwei Dimensionen bestimmen: nach Wissensformen (Faktenwissen, Konzeptwissen, prozedurales Wissen, metakognitives Wissen) und nach kognitiven Prozessen (Erinnern, Verstehen, Anwenden, Analysieren, Gestalten, Evaluieren). Als überarbeitete Fassung der auch für den Mathematikunterricht verwendeten Lernzieltaxonomie von Bloom (vgl. Zech 1996, S. 66ff.) können damit speziell auch die kognitiven Anforderungen mathematischer Aufgaben eingeordnet werden.

4. Neben der Förderung allgemeiner kognitiver Fähigkeiten sollte ein *bereichsspezifischer Neuigkeitswert* lernprozessanregender Aufgaben erlauben, konkrete fachlich-spezifische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten weiterzuentwickeln (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 336). Inwiefern ein bereichsspezifischer Neuigkeitswert vorliegt, kann durch einen Vergleich der Anforderungen der Aufgabe mit dem bereichsspezifischen Lernstand der Schüler, z. B. abgeleitet aus dem relevanten Rahmenplan, eingeschätzt werden.

5. Für lernprozessanregende Aufgaben ist es wichtig, dass der Schüler eine *Chance zur Bewältigung* sieht (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 335), d. h. Möglichkeiten wahrnimmt, sich fehlende Informationen zu beschaffen oder notwendige Fähigkeiten zu erwerben. Liegt eine Chance zur Bewältigung nicht vor oder ist vom Schüler nicht erkennbar, wird er sich von der Aufgabe abwenden, der erhoffte Lernprozess bleibt aus. Grundlegende Bedingung dafür ist, dass die Aufgabenstellung verständlich ist, die Schüler sie inhaltlich und sprachlich erfassen können, wobei bei mathematischen Aufgaben verwendete Fachbegriffe, Symbole und Darstellungen sowie logische Beziehungen eine große Rolle spielen.

6. Die Chance auf Bewältigung der mit einer Aufgabe verbundenen Anforderungen bzw. wenigstens ein Zugang zur Aufgabe ist dann am ehesten für viele Schüler gegeben, wenn die Aufgabe *Selbstdifferenzierung* erlaubt (vgl. Blömeke 2006, S. 336). Eine Differenzierung kann z. B. bzgl. des kognitiven Niveaus, des Umfangs der Bearbeitung oder bzgl. der gewählten Lösungsstrategie erfolgen.

   Bedingung für individuelle Bearbeitungen ist eine gewisse Offenheit der Aufgabe, ein Kriterium, das auch in der Mathematikdidaktik als Merkmal von Aufgabenqualität gesehen wird: Offene Aufgaben bedingen eigenständige Denkprozesse und dienen so dazu, „die

Mathematik besser zu verstehen und ihre Möglichkeiten, Zusammenhänge und Anwendungen nachhaltig zu begreifen“ (Herget 2000, S. 4). Sie bieten Möglichkeiten, „Verständnis für mathematische Begriffe, Sätze und Verfahren zu wecken und zu vertiefen“ (Ambrus/Schulz 2001, S. 69). Die Offenheit einer Aufgabe beschreibt auch ihr Potenzial zur Förderung von Problemlösefähigkeit (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 336), denn offene Aufgaben fordern eigenständige Herangehensweisen und sind somit eine Bedingung für Problemlösen. Zur Beschreibung von Offenheit werden die drei Möglichkeiten von Offenheit bei Aufgaben verwendet: Offenheit in der Aufgabenstellung, im Lösungsweg und in der Zielsituation (vgl. Bruder 2000, S. 68/69).

7. Sollen mit einer Aufgabe allgemeine Kompetenzen erworben und gestärkt werden, müssen die gewonnenen Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten auf andere Situationen übertragen werden können (Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2004, S. 82, Blömeke et al. 2006, S. 336). Der *Transfer auf neue Situationen* kann durch komplexe Aufgaben, die authentische Situationen repräsentieren, gefördert werden. Als Indikatoren werden die Komplexität der notwendigen Modellierung und die Reichweite der Situierung vorgeschlagen.
   Aus mathematikdidaktischer Perspektive spiegelt der Kontext einer Aufgabe die berücksichtigten Vernetzungen mathematischer Konzepte wider. Außermathematische Kontexte verbinden Fach- und Sachwissen. Innermathematische Kontexte drücken die Beziehungshaltigkeit der Aufgabe innerhalb der Mathematik aus (vgl. Neubrand 2002, S. 114).

8. Große Bedeutung kommt schließlich auch der *Reflexion* der Lernergebnisse zu (vgl. Tulodziecki/Herzig/Blömeke 2002, S. 55). Wurde eine Aufgabe, unter Ausführung inhaltsgebundener Aktivitäten, gelöst und liegen Resultate und (unterschiedliche) Lösungswege vor, „geht es darum, explizit herauszuarbeiten, worin der Lernzuwachs aus dieser Aufgabe besteht“ (Bruder 2006, S. 137). Dabei sind eingesetzte mathematische Begriffe und Verfahren als (allgemeine) Mathematisierungsmuster und inhaltsgebundene Aktivitäten als (allgemeine) heuristische Strategien herauszuarbeiten und „in ihrer Tragweite und ihrer Übertragbarkeit auf andere Anwendungskontexte bewusst zu machen“ (Bruder 2006, S. 137). Rückmeldungen ermöglichen das Prüfen innerer Modelle und können Aktivitäten anregen, die Unstimmigkeiten ausgleichen (vgl. Christiansen/Walther 1986, S. 257). Individuelle, lernprozessorientierte Rückmeldungen helfen den Schülern, sich ihre Stärken und Schwächen bewusst zu machen, ein realistisches mathematisches Selbstbild zu entwickeln und gezielt an ihren Fähigkeiten zu arbeiten (vgl. Risse 2006). Neben diesen Reflexionsprozessen hat sozialer Austausch auch schon während der Bearbeitung der Lernaufgaben seine Bedeutung: Aufgaben, die explizit Gruppenarbeit oder Austausch durch Schülerdiskussio-

nen fordern, können die Aktivierung von Vorwissen, die Explizierung von Ideen, das Entstehen sozio-kognitiver Konflikte und das Bereitstellen kognitiver Modelle unterstützen (vgl. Blömeke et al. 2006, S. 337).

In Tabelle 1 werden die fachübergreifenden Kriterien für lernprozessanregende Aufgaben nach Blömeke et al. 2006 sowie jeweils konkrete Indikatoren für die Analyse mathematischer Aufgaben (fachdidaktische Konkretisierung) zusammenfassend aufgelistet.

Tab. 1: Merkmale lernprozessanregender Aufgaben nach dem fachübergreifenden Modell von Blömeke et al. (2006) sowie zugehörige mathematikspezifische Indikatoren

Merkmale lernprozess-anregender Aufgaben	**Analysekriterien für mathematische Aufgaben**
Erschließung eines gesellschaftlich relevanten Bildungsinhaltes	- Thematisierung gesellschaftlich relevanter mathematischer Methoden und Konzepte
Potenzial zur Motivierung und Aktivierung	- durch die Aufgabe angesprochene Bedürfnisse und Interessen - Authentizität und Aufforderungscharakter
Förderung allgemeiner intellektueller Fähigkeiten	- geforderte kognitive Prozesse - geforderte Wissensformen
Bereichsspezifischer Neuigkeitswert	- Neuigkeit der einbezogenen mathematischen Konzepte, Methoden und Verfahren
Chance auf Bewältigung	- Verständlichkeit der Aufgabenstellung - Bekanntheit notwendiger mathematischer Konzepte und Methoden
Potenzial zur inneren Differenzierung, Offenheit	- Möglichkeiten individueller Zugänge und Bearbeitungen durch Offenheit in der Ausgangssituation, im Lösungsweg oder in der Zielsituation
Potenzial zur Übertragung der Lernhandlung (Transfermöglichkeiten)	- Übertragbarkeit der einbezogenen Aktivitäten und erarbeiteten mathematischen Einsichten und Zusammenhänge - Komplexität der Modellierung
Anregung sozialer Interaktionen	- Erfordernis austauschbezogener Arbeitsformen - Anregung zur Diskussion und Reflexion

Lernprozessanregende Aufgaben zum Thema Differenzialgleichungen

Das Thema Differenzialgleichungen gehört heute in wenigen Rahmenplänen zu den Pflichtinhalten. Es bietet jedoch nach der Einführung in die Differenzialrechung Gelegenheit, tieferes Verständnis in die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung zu erlangen und kann als eines der mathematischen Konzepte mit den breitesten Anwendungsmöglichkeiten die Nützlichkeit der (Oberstufen-)Mathematik aufzeigen. Einfache Differenzialgleichungen sind mit den Kenntnissen, welche die Schüler nach der Einführung in die Differenzialrechnung besitzen (z. B. Begriff der Ableitungsfunktion, Ableitungen von ganzrationalen Funktionen/Winkelfunktionen/Exponentialfunktionen, Extremwertbetrachtung, Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften einer Funktion und ihrer Ableitung), lösbar. Werden Differenzialgleichungen thematisiert, wenn die Schüler bereits Kenntnisse zur Integration besitzen, können systematische Lösungsverfahren erarbeitet werden, was auch dazu dient, die

Integral- und Differenzialrechnung stärker miteinander zu vernetzen. Im Folgenden werden lernprozessanregende Aufgaben vorgestellt und analysiert, die einen anwendungsorientierten Einstieg in das Thema Differenzialgleichung ermöglichen.

Aufgabe 1: Eine biologische Anwendung

> Mathematik bei der Zellkultur
>
> In einem Zellkulturlabor werden Tumorzellen gezüchtet, um ihre DNA auf Mutationen zu untersuchen. Die Wachstumsrate der Anzahl der Zellen ist direkt proportional zur Anzahl der vorhandenen Zellen. Um die Zellkultur versorgen, teilen oder für die Isolation der DNA beenden zu können, ohne die Zellen zu zählen, ist eine Funktion für die (ungefähre) Anzahl vorhandener Zellen in Abhängigkeit von der Dauer der Zellkultur gesucht.
> Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Wachstumsrate der Anzahl der Zellen und der Anzahl der vorhandenen Zellen anhand einer Gleichung. Eine solche Gleichung, in der die Funktion und ihre Ableitung(en) vorkommen, wird Differenzialgleichung genannt.
> Bestimmen Sie die Funktion, die Ihre Differenzialgleichung erfüllt.
> Charakteristisch für eine Wachstumsfunktion ist ihre Verdopplungszeit. Wie hängt diese mit dem freien Parameter Ihrer Funktion zusammen? Wie könnte deshalb der freie Parameter bestimmt werden?

Aus der verbalen Beschreibung der Realsituation im Aufgabentext kann von den Schülern die Differenzialgleichung: $N'(t) = kN(t)$ abgleitet werden[1], wobei $N(t)$ die Anzahl der Zellen N in Abhängigkeit von der Dauer der Zellkultur t und k ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Lösungsfunktion kann durch Analysieren und Testen von Ableitungen bekannter Funktionen gefunden werden. Auf Grund ihrer Vorkenntnisse zu Wachstumsprozessen sollte die Exponentialfunktion für die Schüler naheliegend sein. Eine Möglichkeit der graphischen Lösung bietet das Zeichnen des Richtungsfeldes, z. B. auch mit einem Computeralgebrasystem (vgl. Abb. 1). Eine dritte Lösungsvariante wäre die logarithmische Substitution $u = \ln N$. Damit könnte anhand einer einfachen Aufgabe eine Technik eingeführt werden, die auch bei komplexeren Differenzialgleichungen hilfreich ist. Haben sich die Schüler bereits mit der Integralrechnung beschäftigt, liegt mit der Integration durch Trennung der Variablen eine weitere Lösungsmöglichkeit vor: $\frac{dN}{dt} = kN(t) \Rightarrow \int \frac{1}{N} dN = \int k dt \;\Rightarrow\; \ln N = kt + C \;\Rightarrow\; N = C' e^{kt}$.

Ansätze zu diesen Lösungsverfahren sind möglicherweise in den Schülerlösungen zu finden und können gemeinsam in eine allgemeine, übertragbare Form gebracht werden.

Beim Ansatz $N(t) = Ce^{kt}$ ergibt sich der konstante Faktor C aus der Anfangsbedingung N_0, der Anzahl der eingesetzten (t = 0) Zellen: $N(t) = N_0 e^{kt}$. Erst mit dieser Anfangsbedingung ist die Lösung eindeutig. Die Verdopplungszeit T_2 lässt sich wie folgt bestimmen:

---

[1] Hier findet ein Übergang aus einer diskreten Realsituation in ein kontinuierliches mathematisches Modell statt, was in der Diskussion der Modellbildung angesprochen werden sollte.

$N(T_2) = N_0 e^{kT_2} = 2N_0 \;\Rightarrow\; 2 = e^{kT_2} \;\Rightarrow\; \ln 2 = kT_2$. Der Faktor k kann somit aus der Verdopplungszeit ermittelt werden. Dazu ist zu beobachten, nach welcher Zeit in der Zellkultur ungefähr doppelt so viele Zellen vorhanden sind wie zu Beginn. Dies ist einmalig durch Auszählen zu bestimmen, dann ist die Funktion verwendbar.

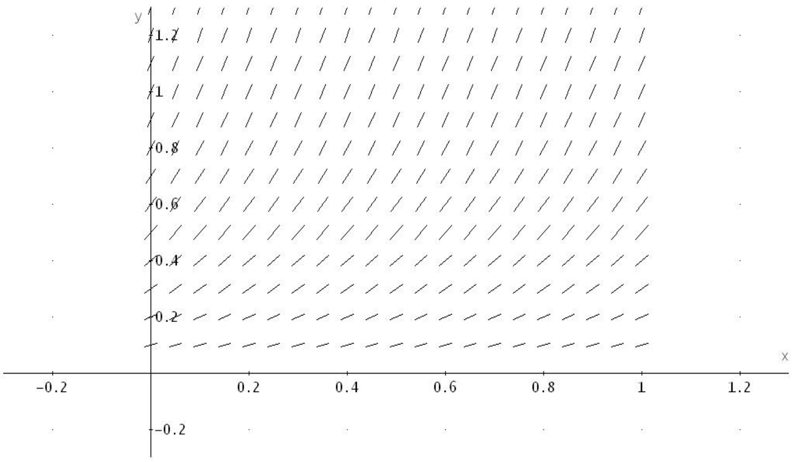

Abb.1: Richtungsfeld der Differenzialgleichung $y'(t) = 4y(t)$, gezeichnet mit Derive 6.

Die Aufgabe erfüllt die Kriterien an lernprozessanregende Aufgaben (vgl. Tab. 1). Für die Übertragung der erarbeiteten Konzepte und Strategien auf weitere Problemstellungen ist jedoch die Reflexion der Lösungswege notwendig. Innerhalb der Diskussion und Bewertung des verwendeten mathematischen Modells wird sicherlich angesprochen, dass die Anzahl der Zellen nicht unbeschränkt exponentiell anwachsen kann, da Nährstoffe und Platz begrenzt sind. Die Differenzialgleichung kann daraufhin durch einen beschränkenden Term (z. B. $N'(t) = k(G - N(t))$ (beschränktes Wachstum) oder einen Term, welcher das Sterben der Zellen beschreibt, erweitert werden. Beim logistischen Wachstum ist der Zuwachs sowohl zum momentanen Bestand als auch zum verfügbaren Rest einer das Wachstum begrenzenden Kapazität ($G - N(t)$) proportional, was zur Differenzialgleichung $N'(t) = k(G - N(t)) \cdot N(t)$ führt. Lösungen dieser Differenzialgleichungen haben die Form $N(t) = \frac{G}{1 + e^{-Gkt+c}}$. Diese Funktionen wachsen im Anfangsstadium exponentiell und nähern sich mit $t \to \infty$ einer waagerechten Geraden (stationärer Zustand). Die Differenzialgleichung des logistischen Wachstums kann mit der Substitution $u = \ln(N) - \ln(G - N)$ gelöst werden. Die komplexere Differenzialgleichung kann aber auch genutzt werden, um auf das Lösen von Differenzialgleichungen mit Computeralgebrasystemen einzugehen.

Tab. 2: Analyse der Aufgabe 1 nach den Kriterien für lernprozessanregende Aufgaben

Merkmal	**Analyse**
Erschließung eines gesellschaftlich relevanten Bildungsinhaltes	Mit der Aufgabe lernen die Schüler das mathematische Konzept der (gewöhnlichen) Differenzialgleichung kennen. Differenzialgleichungen haben überall dort Bedeutung, wo Veränderungen funktionaler Zusammenhänge eine Rolle spielen, z. B. bei Wachstumsvorgängen in Biologie, Physik, Gesellschaftswissenschaften, bei Strömungsvorgängen in Physik, Technik, Medizin, bei kinetische Prozessen in Physik, Chemie. Sie können dabei als mathematisches Konzept und als Methode verstanden werden, wobei der zweite Aspekt beim Aufgabenlösen angewendet wird, der erste innerhalb einer Reflexion herauszustellen wäre.
Potenzial zur Motivierung und Aktivierung	Der biologisch-medizinische Kontext ist an Schüler gerichtet, die sich später z. B. im Studium mit diesen Inhalten beschäftigen. Er zeigt auf, dass auch diese Fächer durch mathematische Methoden erleichtert werden oder einen Erkenntniszuwachs erhalten. Gleichzeitig ist das Thema im Alltag bedeutsam genug, um weitere Schüler anzusprechen. Die Offenheit der Aufgabe kann mit einer Herausforderung verbunden sein, da eigenes Denken und Kreativität gefragt ist.
Förderung allgemeiner intellektueller Fähigkeiten	Die Modellierung der außermathematischen Problemstellung ist mit vielfältigen und anspruchvollen kognitiven Prozesse verbunden: Zusammenhänge zu mathematischen Konzepten sind herzustellen, erlernte Strategien sind anzuwenden oder neue zu finden, funktionale Zusammenhänge oder graphische Darstellungen sind zu analysieren, eine Lösungsfunktion ist zu entwickeln und evtl. wird sogar das verwendete Modell evaluiert. Einbezogene Wissensformen: Faktenwissen (Ableitungsregeln), prozedurales Wissen (z. B. Ableiten, Zeichnen von Richtungsfeldern), konzeptuelles Wissen (Übertragen von Lösungsstrategien, Prüfen von Vermutungen), metakognitives Wissen (Bedeutung der Mathematik für die Analyse von Wachstumsprozessen).
Bereichsspezifischer Neuigkeitswert	Das Konzept der (gewöhnlichen) Differenzialgleichung wird ausgehend von der Aufgabenstellung erarbeitet. Evtl. wird das graphische Lösen einfacher Differenzialgleichungen anhand des Zeichnens von Richtungsfeldern, die Technik der logarithmischen Substitution oder die Methode der Integration mittels Trennung der Variablen thematisiert. Wurden Wachstumsprozesse bereits thematisiert, kann das Konzept vertieft und mit Inhalten und Methoden der Differenzialrechnung verbunden werden.
Chance auf Bewältigung	Nach der Einführung in die Differenzialrechnung sind mathematische Inhalte und Methoden bekannt, mit denen die geforderten Problemlöseprozesse bewältigt werden können. Das für die Aufgabe notwendige biologische Grundverständnis sollte für Schüler der gymnasialen Oberstufe Alltagswissen sein. Die Differenzialgleichung ist ohne zusätzliche Kenntnisse aus den in der Aufgabenstellung beschriebenen Zusammenhängen ableitbar.
Potenzial zur Differenzierung, Offenheit	Die Aufgabe ist im Lösungsweg offen, wodurch Differenzierungsmöglichkeiten, z. B. bezüglich der Darstellungen und Strategien, gegeben sind. Einschränkend wird das mathematische Modell benannt, um das Kennenlernen des Konzeptes der Differenzialgleichung zu ermöglichen.
Potenzial zur Übertragung der Lernhandlung (Transfermöglichkeiten)	Das Konzept der Differenzialgleichung ist auf zahlreiche mathematische und Anwendungssituationen übertragbar. Gleiches gilt für Aktivitäten, die direkt mit dem Konzept zusammenhängen, wie das Analysieren der in der Gleichung formulierten Zusammenhänge oder das Aufstellen von Vermutungen für die Lösungsfunktion. Andere Aktivitäten, wie das Analysieren der außermathematischen Situation, sind noch weitreichender, da sie unabhängig vom konkreten mathematischen Modell sind. Die beim Modellieren ausgeführten Aktivitäten sollten in der Reflexion bewusst gemacht und bzgl. ihrer Eignung, aber auch ihrer Übertragbarkeit diskutiert werden. Naheliegende Übertragungsmöglichkeiten sind andere Wachstums-/Zerfallsprozesse, z. B. kann auf diese Weise das Gesetz für den radioaktiven Zerfall hergeleitet werden.
Anregung sozialer Interaktionen	Die Zusammenarbeit von Schülern wird weder explizit angeregt noch eingeschränkt. Sinnvoll erscheint es, generell für Lernaufgaben, Zusammenarbeit zu unterstützen. Eine Diskussion und Reflexion wird mit der Aufgabenstellung nicht explizit angeregt. Sie ist aber nach den individuellen Bearbeitungen zu initiieren, um sowohl das erarbeitete neue Konzept als auch die Lernhandlungen herauszustellen. Eine Aufforderung zur Diskussion und Bewertung des erstellten mathematischen Modells kann explizit in die Aufgabenstellung integriert werden und sollte die Umsetzung argumentativer Aktivitäten verstärken.

Aufgabe 2: Versteckte Physik oder versteckte Mathematik?

> <u>Mathematik beim Fallschirmspringen</u>
> Mit welcher Geschwindigkeit erreicht ein Fallschirmspringer die Erdoberfläche?

Jedem Schüler ist das Bild seicht durch die Luft schwebender Fallschirme bekannt. Hier kann somit kein freier Fall vorliegen. Neben der beschleunigenden Gewichtskraft $F = -mg$ wirkt die Luftwiderstandskraft $F_r = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2$, wobei c_w der Luftwiderstand des Springers bzw. des Fallschirms[2], A die Querschnittsfläche, ρ die Luftdichte und v die Geschwindigkeit ist. Damit ergibt sich mit dem Newtonschen Grundgesetz $F = ma = mv'(t)$ für die Geschwindigkeit die Differenzialgleichung $v'(t) = g - \frac{c_w A \rho}{2m}(v(t))^2$. Wird das Richtungsfeld für die vereinfachte Differenzialgleichung $v'(t) = g - K(v(t))^2$ gezeichnet, kann erkannt werden, dass die Fallgeschwindigkeit zunächst steigt, aber einen begrenzenden Wert nicht übersteigt. Physikalisch ergibt sich die stationäre Endgeschwindigkeit auf Grund des Kräftegleichgewichtes zwischen Gewichts- und Luftwiderstandskraft. Aus $mg = \frac{1}{2} c_w A \rho v_{end}^2$ ergibt sich $v_{end} = \sqrt{\frac{2\,gm}{c_w A \rho}}$.

Die Endgeschwindigkeit ist somit von der Masse des Springers und des Fallschirms und von der Querschnittsfläche des Fallschirms, aber nicht von der Absprunghöhe abhängig. Ein Springer von 80 kg würde bei einem Fallschirmradius von 1,5 m beispielsweise auf eine Endgeschwindigkeit von ca. 9 m/s kommen, was einer Fallhöhe von ca. 4 m ohne Fallschirm entspricht. Für die Geschwindigkeit bei der Landung ist es folglich nicht notwendig, die Differenzialgleichung selbst zu lösen. Sie dient als heuristisches Mittel, um den Verlauf der Geschwindigkeit zu erkennen.

Die Differenzialgleichung $\dot{v}(t) = g - K(v(t))^2 = \left(\sqrt{g} - \sqrt{K}v\right)\left(\sqrt{g} + \sqrt{K}v\right)$ kann analytisch mit der Substitution $u = \ln\left(\sqrt{\mathrm{g}} + \sqrt{K}v\right) - \ln\left(\sqrt{g} - \sqrt{K}v\right)$ gelöst werden, wodurch die Technik der logarithmischen Substitution weitergeführt wird. Aus der Lösung $v(t) = \sqrt{\frac{g}{K}}\,\frac{e^{2\sqrt{gK}t+k} - 1}{e^{2\sqrt{gK}t+k} + 1}$ kann ebenfalls erkannt werden, dass für $t \to \infty$ die Geschwindigkeit den konstanten Wert $\sqrt{\frac{g}{K}} = \sqrt{\frac{2gm}{c_w A \rho}}$ annimmt.

---

[2] Beim Fallschirm kann mit einer effektiven Fläche gerechnet werden, die etwa zwei- bis dreimal so groß wie die geometrische Fläche ist: c_w=2-3 (vgl. Meschede 2004, S. 66). Eine Mensch ohne Fallschirm hat in Abhängigkeit von der Körperhaltung maximal eine effektive Fläche von 2 m².

Auch die zweite Aufgabe erfüllt die Kriterien für lernprozessanregende Aufgaben, wenngleich mathematisches Wissen hier nicht (vorrangig) aufgebaut, sondern gefestigt, übertragen, und vertieft wird. Der physikalische Kontext freier und gebremster Fall wird weiter in den für Schüler interessanten Bereich Sport eingebettet, um die Relevanz des mathematischen Konzeptes der Differenzialgleichung in unterschiedlichen Anwendungsgebieten zu zeigen und zugleich die Schüler durch einen authentischen Kontext zu motivieren. Für den Zugang zur Aufgabe ist ein grundlegendes Verständnis des physikalischen Konzeptes Fall mit Luftwiderstand notwendig bzw. es sind Voraussetzungen zu schaffen, dass sich die Schüler die Zusammenhänge erarbeiten können. „Ideenkonferenzen“ und individuelle (minimale) Hilfen können das Stagnieren des Lösungsprozesses verhindern, ohne einzuengen. Auch bei dieser Aufgabe ist eine geeignete Reflexion wichtig, um die verwendeten Lösungskonzepte einzuordnen und ihre Übertragbarkeit herauszustellen.
Bei der Diskussion des verwendeten mathematischen Modells sollte dabei auch auf Vereinfachungen eingegangen werden. Beispielsweise wurde nicht beachtet, dass der Fallschirm erst nach einer gewissen Zeit geöffnet wird. Außerdem sollten die möglicherweise nur von einem Teil der Schüler gewonnen Erkenntnisse allen zugänglich gemacht werden, z. B., dass beim Erreichen einer stationären Geschwindigkeit die Ausgangshöhe für die Aufprallgeschwindigkeit nicht mehr bedeutend ist.

Weitere Anregungen und Diskussion von Problemfeldern

Das Konzept der Differenzialgleichung bietet gerade auch durch die Verbindungen mit den Kontexten Physik und Sport eine Fülle reichhaltiger Anwendungen. Dabei können in Verbindung mit den Kriterien für lernprozessanregende Aufgaben in der schulischen Umsetzung aber auch Probleme auftreten.

Problem Relevanz im Kontext

Die folgende Aufgabe zeigt im Kontext Sport auf, wie das wichtige physikalische Konzept des senkrechten Wurfs mathematisch beschrieben werden kann. Auf Grund der Einfachheit der die Bewegung bestimmenden Differenzialgleichung wäre diese Aufgabe auch gut zur Einführung in das Konzept der Differenzialgleichung geeignet bzw., um vor Aufgabe 2 auf den freien Fall einzugehen.

<u>Mathematik beim Volleyball</u>

Beim Zuspiel im Volleyball wird der Ball manchmal senkrecht nach oben gebaggert. Wie viel Zeit steht für ein solches Zuspiel zur Verfügung?

Die Flugzeit kann aus der Funktion h für die Höhe $h(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t bestimmt werden. Das Newtonsche Grundgesetz $F = ma$ liefert eine Gleichung für die zweite Ableitung der Flughöhe nach der Zeit: $h''(t) = -g$. Diese Differenzialgleichung ist schnell durch zweimalige Integration lösbar. Sind die Schüler noch nicht mit der Integration vertraut, können sie die Funktion für die Flughöhe durch Diskussion der Graphen ihrer Ableitungen gewinnen. Als Zwischenschritt liefert die Suche einer Funktion mit konstantem Anstieg ($-g$) die Funktion für die Geschwindigkeit: $h'(t) = -gt + v_0$, wobei v_0 die Startgeschwindigkeit (Anfangsbedingung) ist. Daraus folgt, dass der Anstieg von $h(t)$ für $t < \frac{v_0}{g}$ negativ und für $t > \frac{v_0}{g}$ positiv ist. Bei $t_S = \frac{v_0}{g}$ befindet sich das Maximum (Steighöhe). Somit kommt als Lösungskurve eine nach unten geöffnete Parabel in Frage, was auch mit den physikalischen Vorstellungen zum senkrechten Wurf übereinstimmt und durch Probe bestätigt werden kann. Mit den spezifischen Anfangsbedingungen ergibt sich $h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0$. Für die Steighöhe h_S folgt $h_S = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + h_0$ und für die gesamte Flugzeit $t_F = 2\frac{v_0}{g}$. Die Flugzeit ist die doppelte Steigzeit, was sich auch aus der Symmetrie der Parabel ergibt. Sie ist nur von der Startgeschwindigkeit, also vom Impuls, den der Ball vom abgebenden Spieler bekommt, abhängig.

Die Schüler können anhand dieser Aufgabe mit ihren Kenntnissen zur Differenzialrechnung selbständig ihnen aus der Physik bekannte Gleichungen mathematisch herleiten. Das Problem ergibt sich jedoch bei der Frage nach konkreten Werten. Woher bekommt man die Anfangsgeschwindigkeit, um die Flugzeit zu ermitteln? Kann nicht eher die Flugzeit abgeschätzt und damit die Anfangsgeschwindigkeit und der übertragene Impuls bestimmt werden? Ist das aber für Schüler interessant?

Problem Komplexität

Ein anregender weiterführender Kontext ist das Bungeespringen. Dabei werden die physikalischen Konzepte freier Fall, Federschwingung und senkrechter Wurf vereint. Die Schüler können hier in besonderem Maße den Zusammenhang zwischen wirkender Kraft, bewegungsbestimmender Differenzialgleichung und resultierender Lösungskurve verinnerlichen. Auf Grund der unterschiedlichen wirkenden Kräfte bei ungedehntem und gedehntem Gummiseil ist die Lösungskurve eine Stückelung von Sinus- und Parabelbögen. Auf diese Weise kann sehr schön der Nutzen von stückweise definierten Funktionen gezeigt werden, die oft nur künstlich eingeführt werden.

Im Detail ist die Bestimmung der Funktion für die Höhe in Abhängigkeit von der Zeit jedoch so komplex, dass für den Grossteil der Schüler keine Chance auf Bewältigung besteht. Eine Möglichkeit, sich dennoch mit dieser Thematik zu beschäftigen wäre die Differenzialgleichungen für den senkrechten Wurf und die Federschwingung einzeln zu betrachten und die Lösungskurve qualitativ zu beschreiben. Möglicherweise regt das Thema aber auch zu einem Projekt an, bei dem den Schülern ausreichend Zeit zur Verfügung steht, sich intensiv mit dem Thema zu beschäftigen.

Eigenständige Lernprozesse sind für alle Schüler eine Herausforderung. Wie groß diese Herausforderung ist, hängt neben individuellen Eigenschaften (z. B. fachbezogenes Selbstbewusstsein, Ausdauer) davon ab, wie geübt die Schüler im eigenständigen Entdecken, Problemlösen, Modellieren etc. sind. In diesem Zusammenhang zeigt sich oft ein Spannungszustand zwischen den Kriterien Authentizität und Komplexität der Modellierung auf der einen Seite und dem Kriterium der Chance auf Bewältigung auf der anderen Seite. Um einen erfolgreichen Lernprozess zu erlauben, ist eine geeignete Balance zu finden. Dazu kann beitragen, die individuellen Voraussetzungen der Schüler bezüglich der acht Kriterien zu kennen. Zum anderen kann die Offenheit der Aufgabenstellungen z. B. durch führende Teilaufgaben (vgl. Aufgabe 1) oder auch durch individuelle Hinweise variiert werden, um den Vorkenntnissen der Schüler gerecht zu werden und diese schrittweise zu erweitern.

Schluss: Situationsgerechte Einsetzung lernprozessanregender Aufgaben

Der anwendungsorientierte Einstieg in das Themengebiet Differenzialgleichung ermöglicht den Schülern durch die auf eigenständige Lern- und Transferprozesse ausgerichteten Aufgaben, sich selbst Zugang zu einem neuen mathematischen Konzept zu verschaffen. Der Einstieg kann Ausgangspunkt für eine systematische Erarbeitung und theoretische Einbettung des Konzeptes Differenzialgleichung sein. Bei der Zusammenstellung von Lösungsverfahren kann dann wieder auf die vorgestellten Aufgaben Bezug genommen werden, wobei z. B. die systematische Entwicklung der Technik der logarithmischen Substitution gewinnbringend ist. Für ein „sachlogisch aufgebautes, systematisches, inhaltsbezogenes Lernen, das grundlegende Kenntnislücken, Verständnisdefizite und falsche Wissenselemente vermeidet“ (Weinert 1999, S. 28), ist nach Weinert die zweckmäßigste Unterrichtsform die direkte Unterweisung, eine lehrergesteuerte, aber schülerzentrierte Unterrichtsform, die vom üblichen lehrerzentrierten und schülerrezeptiven Frontalunterricht zu unterscheiden ist. Das eigenständige Lernen, z. B. anhand lernprozessanregender Aufgaben, ist dagegen geeignet für die Aneignung situiert-anwendungsbezogenen Wissens, wofür der Lernende die relevanten Informationen aktiv, kreativ und situiert erwerben muss (vgl. Weinert 1999, S. 28). Damit ist abschließend die Bedeutung lernprozessanregender Aufgaben, nicht nur für den Mathematikunterricht, herausgestellt, aber auch eingegrenzt worden.

Literatur:

Ambrus, A./Schulz, W. (2001): Offene Aufgaben beim Arbeiten mit Funktionen in der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 69-72.

Anderson, L. W./Krathwohl, D. R./Airasian, P. W./Cruikshank, K. A./Mayer, R. E./Pintrich, P. R. (Hrsg.)(2001): A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: A Revision of Bloom´s Taxonomy of Educational Objectives. New York: Longman.

Blömeke, S./Risse, J./Müller, C./Eichler, D./Schulz, W. (2006): Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. In: Unterrichtswissenschaft, Jg. 34, Heft 4, S. 330-357.

Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS. Berlin: Volk und Wissen, S. 69-78.

Bruder, R. (2006): Langfristiger Kompetenzaufbau. In: Blum, W./Drüke-Noe, C./Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, S. 135-151.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistungen überprüfen. Berlin: Cornelsen.

Christiansen, B./Walther, G. (1986): Task and activity. In: Christiansen, B./Howson, A. G./ Otte, M. (Hrsg.): Perspectives on mathematics education. Dodrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: Reidel, S. 243-307.

Heckhausen, H. (1974): Motive und ihre Entstehung. In: Weinert, F. E. et al. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. Band 1. Frankfurt a.M.: Funk-Kolleg, S. 133-171.

Herget, W. (2000): Rechnen können reicht ... eben nicht! In: mathematik lehren, Heft 100, S. 4-10.

Klafki, W. (1969): Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. In; Roth, H./Blumenthal, A. (Hrsg.): Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule. Hannover, S. 5-34.

Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen.

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Meschede, D. (2004): Gerthsen Physik. Berlin, Heidelberg: Springer.

Rheinberg, F. (2002): Motivation. Stuttgart: Kohlhammer.

Risse, J. (2006): Stärken (und Schwächen) bewusst machen – mathematische Kompetenzen differenziert rückmelden. In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 48, Heft 10, S. 9-13.

Tulodziecki, G./Herzig, B./Blömeke, S. (2004): Gestaltung von Unterricht. Eine Einführung in die Didaktik. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Weinert, F. E. (1999): Bedingungen für mathematisch-naturwissenschaftliche Leistungen in der Schule und die Möglichkeiten ihrer Verbesserung. In: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.): Weiterentwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts. S. 21-32.

Zech, F. (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim und Basel: Beltz.

Autoren:

Jana Risse, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Arbeitsgruppe Mathematik und ihre Didaktik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin. eMail: risse@mathematik.hu-berlin.de

Prof. Dr. Sigrid Blömeke, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Erziehungswissenschaften, Abt. Systematische Didaktik und Unterrichtsforschung, Unter den Linden 6, 10099 Berlin. eMail: sigrid.bloemeke@staff.hu-berlin.de